Foto Deighton Emmons Jr.: El Correo. Unesco

# Para estar seguros

Cierta rutina se instala a veces en la clase de matemática: para los chicos el docente es quien determina lo que está bien y lo que está mal. La propuesta es que los alumnos por sus propios medios y usando el conocimiento matemático puedan validar lo que hacen. Se apropien del conocimiento para autorizarse a sí mismos.

Reportaje a Patricia Sadovsky
y Carmen Sessa
Universidad de Buenos Aires

■ **La Educación en nuestras manos:** *¿Cómo sintetizarían el sentido formativo que tiene la enseñanza de la matemática en la escuela?*

**Carmen Sessa:** Lo que nosotros estamos planteando es que la enseñanza ponga en primer plano el carácter de herramienta de modelización de la matemática, como vía para la construcción de los distintos conceptos matemáticos.

**Patricia Sadovsky:** Estamos preocupados por lograr que los alumnos comprendan que el conocimiento matemático es una herramienta que otorga cierto poder, en el buen sentido del término. A través del trabajo matemático en la escuela, los niños deberían aprender que la utilización de conceptos matemáticos permite anticipar el resultado de ciertas acciones, sin necesidad de realizarlas efectivamente. Cuando enfrentan un problema, los alumnos deben estar en condiciones de movilizar las relaciones pertinentes para resolverlo y también las herramientas para estar seguros de que han resuelto correctamente.

**C. S.:** Sabemos que es necesario romper con una cierta rutina que se instala en la escuela: normalmente los chicos descansan en el profesor, que es quien determina qué es lo que está bien y qué es lo que está mal. A su vez el profesor ve que resulta muy difícil lograr que los alumnos asuman la necesidad de tener -y jugar- herramientas que les permitan controlar sus resultados, sus respuestas, sus afirmaciones. Los alumnos ven a la matemática como ajena y a lo sumo pueden aprender una serie de rutinas. Poner la validación como parte del trabajo matemático, no como algo que se hace después, es un aspecto que consideramos imprescindible. No es que termina el problema y después se corrige. Pensar en situaciones de clase en las que la validación de los procesos sea parte del trabajo.

**P. S.:** Es muy distinto corrección que validación. Corregir es corroborar si un resultado es correcto o no, es una práctica instalada. Pero validar es usar el mismo conocimiento como medio explicativo para estar seguro. Para nosotras, lograr que los alumnos comprendan

## El problema de
# los pétalos de las flores

**P.S.:** Este ejemplo me lo contó Delia Lerner. En un segundo grado, la maestra había dado como consigna que los chicos propusieran problemas difíciles de multiplicación. En realidad se había propuesto esta situación cuando los chicos todavía no manejaban el algoritmo (la cuenta) de la multiplicación. Habían trabajado con situaciones de multiplicación, pero todavía no estaba instalado el algoritmo convencional y normalmente recurrían a sumas. El tipo de situación que estaban tratando era una de las más básicas de entrada en este concepto: *"si se tienen tantos elementos juntos en cada grupo, y hay varios grupos, todos de la misma clase, ¿cuántos elementos habrá en total?"*. Esta situación se inscribe en el contexto de la proporcionalidad directa. En general, para un niño de segundo grado proponer situaciones difíciles es trabajar con números grandes. Como dijimos, ellos apelaban a sumas reiteradas para resolver los problemas y en todo caso abreviaban un poco las sumas, agrupando términos parciales. Un chico propuso como problema: si una flor tiene tres pétalos, ¿cuántos pétalos tienen 1782 flores? Los compañeros empezaron a protestar diciendo: *"No, no, que hay que hacer 3 más 3 más 3, 1782 veces, es muy difícil no lo podemos hacer"*.. Nuestro alumno intervino entonces muy seguro: *"No: es lo mismo hacer 1782, más 1782, más 1782"*. El resto de la clase protestaba: *"¿Cómo va a ser lo mismo?"* Nuestro protagonista sostiene que es lo mismo *"porque si cada flor tuviera un solo pétalo tendríamos 1782 pétalos, si le agregamos un pétalo más a la flor, tenemos dos pétalos por flor son 1782 más, y otro pétalo más son 1782 más. Entonces es lo mismo 1782, más 1782, más 1782"*. Acá se ve claramente qué es lo que queremos decir cuando planteamos que los niños deben experimentar el poder de anticipar a través de relaciones matemáticas. No es haciendo la cuenta que el niño está seguro del resultado sino es a través de una deducción, es el razonamiento que él hace lo que le permite estar seguro. Por eso cuando nos referimos a la validación hablamos de un argumento explicativo y no de una constatación empírica. Es probable que no todos los niños de esta clase estuvieran en condiciones de producir ellos un razonamiento similar. No importa, la explicación circula, se discute, se intenta hacer comprender y sobre todo instala un modo de interactuar en la clase.

**C. S.:** No es que el docente dio la clase y dijo esto está bien, esto no. El alumno tuvo que buscar argumentos para convencer al resto de la clase que así como él decía era correcto.

**P. S.:** El hecho de que los demás acepten la explicación, supone una evolución en sus conocimientos porque están aceptando un argumento que, sin hacer la cuenta, permite estar seguros de que hacer 1782 veces tres es lo mismo que hacer tres veces 1782. Establecer la igualdad de los resultados a través de un argumento, no es lo mismo que hacer las dos cuentas y comprobar que dan el mismo resultado; este último camino es empírico. O sea es una constatación que ni es anticipatoria ni es explicativa. Es decir, si los chicos hubieran hecho las dos cuentas y hubieran comprobado que dan ambas el mismo resultado, no hubieran tenido idea de por qué ocurre eso y, en ese sentido, el resultado encontrado no se inscribe en alguna organización de conocimientos: dio esto, pero podría haber dado otra cosa. En la escuela suele estar muy instalada la constatación empírica (hago los dos resultados y compruebo que dan lo mismo) pero eso no alcanza para explicar. Cuando hablamos de explicar, estamos pensando en el alumno, no le alcanza al alumno para hacerle inteligible una relación.

que el conocimiento permite estar seguro es un eje fundamental en la enseñanza de la matemática. Hay alumnos que nunca se enteraron de que el conocimiento es un medio para estar seguro, son los chicos que fracasan y se comportan con relación al trabajo matemático como si éste fuera completamente azaroso. La problemática de la validación es didácticamente compleja.

## La validación

■ *¿Qué es la validación?*

**P. S.:** Entendemos por validación, el proceso por el cual los chicos pueden acceder, por sus propios medios y usando el conocimiento matemático, a conocer la pertinencia de los resultados y resoluciones que producen. Entendiendo que los resultados incluyen los procesos. Resolver un problema implica desplegar y agotar un cierto proceso. La validación no es sólo saber si el resultado coincide o no con lo esperado, es fundamentar, es saber dar razones de por qué estas herramientas resuelven el problema. Esta posición que queremos lograr en los alumnos, contradice aquello culturalmente establecido. Efectivamente, lo usual es que el alumno resuelve y el docente corrige esa resolución. Esto dificulta la posibilidad de que el alumno se responsabilice matemáticamente por sus resultados. Acá hay un trabajo muy intenso que el docente tiene que hacer, mostrando su intención de que sean los alumnos los que validen sus producciones.

Es claro que un aspecto importante para lograr este tipo de práctica es que la actividad que se plantea en el aula admita la posibilidad de que los alumnos pongan en juego estrategias de validación. Si se trabaja una cuenta de esas de suprimir corchetes y paréntesis que hacíamos en la escuela, de dos pisos o tres, no hay manera de validarla. Porque se está apelando a una serie de técnicas que no están insertas en un sistema de conocimiento, dado que no hay conciencia de las propiedades que se están usando. Tampoco validar es recitar teoremas. Se trata de elaborar una práctica fundamentada, en la que el alumno se autorice a sí mismo, apelando al conocimiento.

## Trabajar los problemas

**C. S.:** No cualquier problema es interesante para que los alumnos puedan entrar en el camino de la validación. Hay condiciones de los problemas y del modo en que se proponen que van a generar mejor o peores posibilidades para que los alumnos pongan en marcha herramientas de validación.

**P. S.:** Un ejemplo es la tabla de los números. La maestra empieza poniendo en el pizarrón el comienzo de una tabla, sin decir mucho cómo está armada:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 |
| | | 16 | 17 |

En una primera etapa, se quiere asegurar que los alumnos entiendan cómo está armada esta tabla. Entonces pasa un alumno para continuar la tabla, pone tres números, pasa otro y así sucesivamente. Por ahora no hay ningún problema planteado.

Una vez que la tabla ha sido continuada hasta el 17, 18, se plantea una pregunta: *¿dónde estará ubicado el 47? ¿en qué fila y en qué columna estará el 47?* Se trata de establecer, sin completar la tabla, dónde estará el 47. Para poder anticiparlo hay que empezar a analizar las relaciones entre los elementos de la tabla, para entender cómo está armada. Por ejemplo: habría que establecer que los números de la primera columna van de cuatro en cuatro, que los de la segunda columna también; *"algo tiene que ver la tabla del cuatro"*, dirán algunos chicos. El nivel de organización de la tabla admite que se hagan diversas relaciones. La propuesta es que todos lleguen a establecer dónde, según ellos, está el 47 y que puedan decir cómo lo pensaron. Aquí hay un punto importante: cómo lo pensaron, en qué conocimientos se están basando para poder decir que el 47 está donde ellos dicen que está. Hay una primera confrontación entre los alumnos que van a explicar qué conocimientos movilizaron para establecerlo. Los que produjeron argumentos, los explicitarán. Comienzan a circular en la clase criterios de validez respecto de este problema. Esto favorecerá que aquellos alumnos que no entendieron de entrada el problema, puedan establecer algunas relaciones que los ayuden a *"subirse al tren en un segundo momento"*.

Dos cosas: puede ser que algunos chicos hayan ubicado mal el número. No importa. Esto provocará que el resto de la clase produzca argumentos para convencerlo de su error. Esto también es circulación de conocimiento. Rechazar una manera de pensar que no es correcta es, desde nuestro punto de vista, producir conocimiento. Aprender que algo es, y también aprender cómo no es. Resaltemos que es interesante que lo convenzan de su error sin completar la tabla, a través de argumentos.

**C. S.:** Tiene su utilidad en la clase que también se haga público un argumento que no es correcto.

**P. S.:** Exacto, esto es productivo para todos, no se trata sólo de corregir para los que lo hicieron mal. Es producción para todos porque convencer a otro de que su propuesta no es válida, es una producción. Sigamos con el problema. Una vez que los alumnos dijeron dónde se ubica el 47, se constata, completando la tabla. ¿Esto que función tiene?

En realidad los chicos tienen que estar convencidos con los argumentos que produjeron, pero provocar un juego entre anticipaciones y constataciones empíricas, permite, a esta altura de la escolaridad, que los alumnos estén todo el tiempo en contacto con el poder del conocimiento. El conocimiento matemático sirve para estar seguro independientemente de la experiencia: éste es un aspecto central de la matemática y no siempre está presente en las prácticas del aula.

Bien, completan la tabla hasta llegar al 47, y verifican si la anticipación fue o no correcta. Pero en realidad el tipo de regularidades que se establecen no necesariamente movilizan lo que la situación desde nuestro punto de vista tiene intención de movilizar y es que acá está implicada la división por 4. Si luego preguntamos: ¿dónde está el 17.512?, hay un salto muy grande en el que se inhibe la constatación empírica. Y también se inhibe el ir contando de a cuatro. Los alumnos deberán establecer una relación entre el contar de a cuatro y la división por cuatro. Es importante destacar que cuando uno plantea el problema de saber dónde está el 17.512, las condiciones de la clase son distintas que al inicio de la situación, porque ya hay toda una producción que se movilizó a propósito del 47, y esa va a ser la base para establecer las relaciones entre la ubicación de un número en la tabla y el cociente y el resto de la división por 4. El cociente indica la fila y el resto indica la columna. Es la interacción con el problema en distintas etapas la que va generando la producción de conocimiento que permite movilizar finalmente las estrategias más económicas. En este tipo de situaciones estamos pensando cuando decimos que el problema debe admitir un proceso de validación. El tipo de regularidades que se van a establecer son diversas. La diversidad que admite el problema es un elemento sustancial para el trabajo en el aula. Si el problema va como por un tubo a movilizar una cuestión única, ¿qué habría que validar?

## Distintas formas de presentación

**C. S.:** Así como analizamos que los problemas admiten una diversidad de procedimientos, también admiten distintas formas de representación.

Hay distintas formas de escritura que es necesario poner en juego en la enseñanza, porque a partir de la coordinación de esas distintas formas de representación se va enriqueciendo la conceptualización. Quería tomar como ejemplo el estudio de las funciones, que es un tema de secundario. Al pensar distintas formas de representación en las que este objeto aparece es que se puede atrapar la complejidad del mismo. ¿Qué es una función? ¿Se atrapa una función desde la definición de función? Estamos convencidos de que no. Así como no se puede atrapar la complejidad de ningún concepto por seguir su definición. ¿Cómo se accede al concepto de función? Puede ser a través de un problema en el que están descriptos una serie de relaciones entre variables. También se pueden poner en juego, para una cierta función, una representación en ejes cartesianos en las que se tendrá una imagen visual, un dibujo geométrico de las relaciones entre dos variables. Se puede tener una tabla de valores, en la que aparecen algunos valores que se corresponden en la función. Justamente muchas veces una función que es experimental viene dada así: la temperatura en distintos momentos en la ciudad. O se puede tener, para algunas funciones, una fórmula. De la interacción entre estas cuatro formas de representación que estamos viendo (el contexto del problema, el gráfico en ejes cartesianos, la tabla con los valores numéricos y la fórmula) puede comenzar a atraparse en toda su complejidad el concepto de función. La escuela tiene que hacerse cargo, desde la enseñanza, de esta complejidad y tiene que plantear situaciones en las que los chicos necesiten pasar de una forma de representación a otra y puedan ver además cómo ese pasaje les permite acceder a alguna nueva relación que antes no tenían porque estaban mirando el asunto en cuestión desde otro lugar. Cada una de las formas de representación tiene su utilidad, pero para que esto sea accesible a los alumnos, ellos deben enfrentar problemas que les exijan decidir cuál es la forma de representación que mejor "calzará" con el problema que están resolviendo.

**C. S.:** Pensando en el problema como vos lo planteaste se me ocurre que también se puede preguntar qué número va a aparecer en tal fila y tal columna. Lo cuál pondría en juego la multiplicación en relación con la división.

**P. S.:** Efectivamente, hay varios subproblemas que se pueden plantear. Supongamos, y es lo más razonable, que a algunos se les escape la pregunta del 17.512. Hay intervenciones intermedias que no tienen por qué estar planteadas de entrada. El docente toma el 63, por ejemplo, recortando un pedacito de la tabla. Puede preguntar ¿qué hay arriba?, ¿qué hay abajo?, ¿qué a la derecha y a la izquierda? Quien todavía no estableció regularidades sobre los elementos de la tabla, empieza a movilizarlas.

Habrá alumnos que no abordarán de entrada el problema, por eso hay situaciones intermedias que el docente puede plantear para orientar el trabajo sin matar el problema, de manera tal que los chicos puedan seguir produciendo. Una intervención que no sea ni decir la respuesta, ni proponer *"seguí pensando"*, (a lo cuál los chicos responden *"ya lo pensé, y no sé que más pensar"*). Sería interesante que el docente pudiera intervenir proponiendo preguntas que ayudan a establecer relaciones pero que permiten a la vez que el chico continúe trabajando en el problema.

## Condiciones del problema

**C. S.:** A mí me gustaría resaltar algunas de las cosas que aparecieron en este relato que vos hiciste. Aparece un momento de interacción con toda la clase, una puesta en común como se dice usualmente. Yo me imaginaba la clase con distintos grupos que habían desplegado diferentes estrategias y se ponían en público y se discutían. Es esta diversidad lo que hace que la puesta en común sea interesante y rica. De nuevo vamos a las condiciones de los problemas. Sin esta diversidad, el momento de la puesta en común se reduce a ver quién lo hizo bien, quién lo hizo mal. Es como una evaluación en público.
Hay un valor cognitivo verdaderamente importante en que los alumnos se pongan en contacto con los procedimientos de otros, realmente es para ellos una situación de aprendizaje. Los chicos que usaron un cierto procedimiento, al tener la obligación de explicitarlo para convencer a otros, avanzan en la comprensión de sus propios argumentos. No es lo mismo resolverlo para sí mismo que tener que defenderlo para el resto de la clase explicándoselo a los otros chicos. Para que esto sea posible, es necesario instalar una práctica y eso lleva tiempo. Si este tipo de interacción se propone sólo esporádicamente, será difícil que los alumnos se animen a abordar los problemas, a fundamentarlos, a discutir con sus compañeros, a tratar ideas matemáticas en un espacio de debate. Esto es trasmitir o construir algunos de los rasgos culturales del quehacer matemático.

El otro foco que quería poner es que se ve claramente cómo un problema o el enunciado de un problema es el punto de partida. Si uno encontrara en un libro el enunciado de este problema de la tabla, por ejemplo, no necesariamente se imaginaría toda la gestión que se puede desplegar a partir del enunciado. El problema podría reducirse a que los alumnos respondieran y el maestro corrigiera.

El enunciado del problema es un punto de partida para armar una clase. El propósito es generar interacciones, avances en las relaciones del conocimiento de los chicos. El docente tiene que estar atento para tirar de piolines con el fin de que estas cuestiones evolucionen, no quedando atrapado en el enunciado del problema. Estamos pensando en las condiciones de los problemas pero también en la gestión de las clases.

**P.S.:** Se trata de tomar el problema como objeto. De poner al chico en una posición reflexiva respecto de su propio trabajo. Esto también es una actividad matemática. Me gustaría resaltar el valor cognitivo de la interacción. Me parece que es importante destacar lo que supone explicitar un argumento, el progreso que supone tener que argumentar para refutar o aceptar otra producción.

**C. S.:** Y también entender la de otro.

**G. B.**